

- [38] A. Dulic, C. Flytzanis, C. L. Tang, D. Pepin, M. Fitizon, Y. Hoppilliard, *J. Chem. Phys.* **74** (1981) 1559.
- [39] G. R. Meredith, D. J. Williams, S. N. Fishman, E. S. Goldbrecht, V. A. Krongauz, *J. Phys. Chem.* **87** (1983) 1697.
- [40] G. R. Meredith, V. A. Krongauz, D. J. Williams, *Chem. Phys. Lett.* **87** (1982) 289.
- [41] B. F. Levine, C. G. Bethea, C. D. Thurmond, R. T. Lynch, J. L. Bernstein, *J. Appl. Phys.* **50** (1979) 2523.
- [42] G. F. Lipscomb, A. F. Garito, R. S. Narang, *J. Chem. Phys.* **75** (1981) 1509.
- [43] R. L. Byer in P. G. Harper, B. S. Wherrett: *Nonlinear Optics*, Academic Press, New York 1977, S. 61.
- [44] R. J. Twieg, K. Jain in [1].
- [45] P. N. Butcher: *Nonlinear Optical Phenomena*, Ohio State University Engineering, Columbus 1965.
- [46] G. R. Meredith, J. G. Van Dusen, D. J. Williams in [1], S. 120.
- [47] V. C. Y. So, R. Normandin, G. S. Stegman, *J. Opt. Soc. Am.* **69** (1979) 1166.
- [48] H. Finkelman, H. Ringsdorf, J. Wendorf, *Makromol. Chem.* **179** (1978) 273.
- [49] B. F. Levine, C. G. Bethea, *J. Chem. Phys.* **69** (1979) 5246.
- [50] V. A. Krongauz, *Isr. J. Chem.* **18** (1979) 304.
- [51] Y. Kalisky, T. Orlowski, D. J. Williams, *J. Phys. Chem.*, im Druck.
- [52] J. M. Halbout, S. Blit, W. Donaldson, C. L. Tang, *IEEE J. Quantum Electron.* **15** (1979) 1176.
- [53] J. M. Halbout, A. Sarhangi, C. L. Tang, *Appl. Phys. Lett.* **37** (1980) 846.
- [54] A. F. Garito, K. D. Singer, C. C. Teng in [1], S. 1, zit. Lit.
- [55] G. M. Carter, Y. J. Chen, S. K. Tripathy in [1], S. 213.

Über Sterne, ihre Entwicklung und ihre Stabilität (Nobel-Vortrag)**

Von Subrahmanyan Chandrasekhar*

1. Einleitung

Wenn wir an Atome denken, haben wir eine klare Vorstellung: Ein zentraler Kern ist von einem Schwarm von Elektronen umgeben. Wir stellen uns Atome als kleine Objekte vor, die in Ångström-Einheiten ($\sim 10^{-8}$ cm) gemessen werden. Außerdem wissen wir, daß etwa hundert Arten existieren. Dieses Bild ist in der modernen Quantentheorie natürlich quantifiziert und präzisiert worden. Der Erfolg der gesamten Theorie läßt sich auf zwei Grundtatsachen zurückführen: *Erstens* liefert der Bohrsche Radius des Wasserstoffatoms im Grundzustand ein korrektes Maß der atomaren Dimensionen, nämlich

$$\frac{h^2}{4\pi^2 m e^2} \sim 0.5 \times 10^{-8} \text{ cm} \quad (1)$$

wobei h das Plancksche Wirkungsquantum, m die Masse des Elektrons und e dessen Ladung ist. *Zweitens* gibt der reziproke Wert der *Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante*

$$\frac{hc}{2\pi e^2} \sim 137 \quad (2)$$

die maximale positive Ladung des zentralen Kerns an, die noch einen stabilen Elektronenorbit zuläßt. Diese maximale Ladung des zentralen Kerns rührt von den Effekten der speziellen Relativität auf die Bewegung der umlaufenden Elektronen her.

Wir fragen nun: Können wir die Grundtatsachen über die Sterne so einfach verstehen, wie wir Atome durch die beiden Kombinationen (1) und (2) von Naturkonstanten

verstehen? In diesem Vortrag werde ich versuchen zu zeigen, daß dies in einem beschränkten Sinne möglich ist.

Die wichtigste Eigenschaft eines Sterns ist seine Masse. Sie wird in Einheiten von Sonnenmassen, \odot , gemessen; das sind 2×10^{33} g: Sterne mit sehr viel kleinerer oder sehr viel größerer Masse als die der Sonne sind recht selten. Die heutigen Theorien über Sternstruktur und Sternentwicklung leiten ihre Erfolge hauptsächlich davon ab, daß die folgende Kombination von der Dimension einer Masse die korrekte Größenordnung für die Masse von Sternen liefert:

$$\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{H^2} \approx 29.2 \odot \quad (3)$$

wobei G die Gravitationskonstante und H die Masse des Wasserstoffatoms ist. In der ersten Hälfte dieses Vortrags werde ich mich hauptsächlich mit der Frage beschäftigen: Wie kommt dies zustande?

2. Die Rolle des Strahlungsdrucks

Von zentraler Bedeutung für normale Sterne ist die Rolle des Strahlungsdrucks im hydrostatischen Gleichgewicht. Die Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht eines Sterns ist

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho \quad (4)$$

wobei P den Gesamtdruck, ρ die Dichte und $M(r)$ die Masse einer Kugel mit dem Radius r bedeuten. Es gibt zwei Beiträge zum Gesamtdruck P : Ein Teil rührt von der Materie und ein Teil von der Strahlung her. Unter der Annahme, daß die Materie als ideales Gas im klassischen Maxwellschen Sinn vorliegt, ist der Materiedruck oder Gasdruck gegeben durch

[*] Prof. Dr. S. Chandrasekhar
The University of Chicago
Chicago, IL 60637 (USA)

[**] Copyright © The Nobel Foundation 1984. – Wir danken der Nobel-Stiftung, Stockholm, für die Genehmigung zum Druck dieser Übersetzung.

$$p_{\text{gas}} = \frac{k}{\mu H} \rho T \quad (5)$$

wobei T die absolute Temperatur, k die Boltzmann-Konstante und μ das mittlere Molekulargewicht ist (das unter normalen stellaren Bedingungen ≈ 1.0 beträgt). Für den Strahlungsdruck gilt

$$p_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4 \quad (6)$$

wobei a Stefans Strahlungskonstante bezeichnet. Folglich können wir, wenn die Strahlung den Anteil $(1-\beta)$ zum Gesamtdruck beiträgt, schreiben

$$P = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\beta} a T^4 = \frac{1}{\beta} \frac{k}{\mu H} \rho T \quad (7)$$

Um die Rolle des Strahlungsdrucks im Gleichgewichtszustand eines Sterns explizit darzulegen, können wir die Temperatur T aus Gleichung (7) eliminieren und P in Einheiten von ρ und β statt in Einheiten von ρ und T ausdrücken. Wir bekommen

$$T = \left(\frac{k}{\mu H} \frac{3}{a} \frac{1-\beta}{\beta} \right)^{1/3} \rho^{1/3} \quad (8)$$

und

$$P = \left[\left(\frac{k}{\mu H} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1-\beta}{\beta^4} \right]^{1/3} \rho^{4/3} = C(\beta) \rho^{4/3} \quad (9)$$

Die Bedeutung des Verhältnisses $(1-\beta)$ für die Theorie der Sternstruktur wurde zuerst von *Eddington* hervorgehoben. In einem berühmten Abschnitt seines Buches „The Internal Constitution of the Stars“ brachte er es mit dem „Happening of the Stars“ in Beziehung^[1]. Etwas rationaler ist die folgende Version von *Eddingtons* Argument, welche gleichzeitig die Kombination (3) der Naturkonstanten freistellt:

Nach einem allgemeinen Theorem^[2] muß der Druck P_c im Zentrum eines Sterns der Masse M , der sich im hydrostatischen Gleichgewicht befindet – d. h. bei dem die Dichte $\rho(r)$ an einem Punkt in der radialen Entfernung r vom Zentrum die mittlere Dichte $\bar{\rho}(r)$ an diesem Punkt nicht übersteigt – folgender Ungleichung genügen:

$$\frac{1}{2} G \left(\frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} \bar{\rho}^{4/3} M^{2/3} \leq P_c \leq \frac{1}{2} G \left(\frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} \rho_c^{4/3} M^{2/3} \quad (10)$$

wobei $\bar{\rho}$ die mittlere Dichte des Sterns und ρ_c seine Dichte im Zentrum bedeuten. Dieses Theorem ist nichts weniger als die Zusicherung, daß der wirkliche Druck im Zentrum eines Sterns zwischen den Drücken in den Zentren der beiden Konfigurationen mit gleichförmiger Dichte liegen muß: Im einen Fall ist die Dichte gleich der mittleren Dichte des Sterns, im anderen gleich der Dichte ρ_c im Zentrum des Sterns (siehe Abb. 1). Sollte die Ungleichung (10) verletzt sein, dann müßte es generell einige Gebiete geben, in welchen entgegengesetzte Dichtegradiënten überwiegen, und dies bedeutet Instabilität. Mit anderen Worten: Die Erfüllung der Ungleichung (10) kann als Bedingung für die stabile Existenz der Sterne angesehen werden.

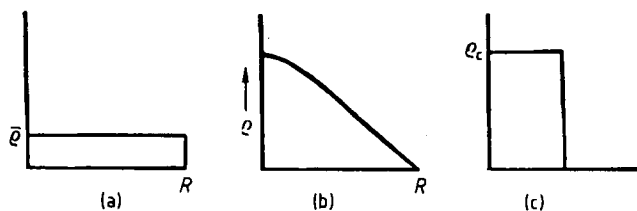


Abb. 1. Vergleich einer inhomogenen Dichteverteilung in einem Stern (b) mit den beiden homogenen Konfigurationen, in denen die konstante Dichte (a) gleich der mittleren Dichte $\bar{\rho}$ und (c) gleich der Dichte im Zentrum ρ_c ist.

Die rechte Seite der Ungleichung (10) zusammen mit Gleichung (9) ergibt für die stabile Existenz der Sterne die Bedingung

$$\left[\left(\frac{k}{\mu H} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1-\beta_c}{\beta_c^4} \right]^{1/3} \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{1/3} G M^{2/3} \quad (11)$$

oder, was gleichbedeutend ist,

$$M \geq \left(\frac{6}{\pi} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{k}{\mu H} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1-\beta_c}{\beta_c^4} \right]^{1/2} \frac{1}{G^{3/2}} \quad (12)$$

wobei β_c in den Ungleichungen (11) und (12) der Wert von β im Zentrum des Sterns ist. Für Stefans Konstante a ergibt sich nun mit dem Planckschen Strahlungsgesetz der Wert

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} \quad (13)$$

Einsetzen von a in Ungleichung (12) ergibt

$$\mu^2 M \left(\frac{\beta_c^4}{1-\beta_c} \right)^{1/2} \geq \frac{(135)^{1/2}}{2\pi^3} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{H^2} = 0.1873 \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{H^2} \quad (14)$$

Wir sehen, daß in Ungleichung (14) die Kombination (3) von Naturkonstanten mit der Dimension einer Masse freigestellt ist. Mit dem numerischen Wert von (3) erhalten wir die Ungleichung

$$\mu^2 M \left(\frac{\beta_c^4}{1-\beta_c} \right)^{1/2} \geq 5.48 \odot \quad (15)$$

Diese Ungleichung liefert für einen Stern gegebener Masse eine Obergrenze für $(1-\beta_c)$. Es gilt daher

$$1-\beta_c \leq 1-\beta_*. \quad (16)$$

$(1-\beta_*)$ ist dabei durch die Masse M des Sterns und das mittlere Molekulargewicht μ über die quadratische Gleichung (17):

$$\mu^2 M = 5.48 \left(\frac{1-\beta_*}{\beta_*^4} \right)^{1/2} \odot \quad (17)$$

In Tabelle 1 sind $(1-\beta_*)$ -Werte für mehrere Werte von $\mu^2 M$ aufgelistet. Aus dieser Tabelle folgt im einzelnen, daß für einen Stern mit der Masse der Sonne und dem mittlere-

ren Molekulargewicht 1 der Strahlungsdruck im Zentrum 3 Prozent des Gesamtdrucks nicht überschreiten kann.

Tabelle 1. Maximaler Strahlungsdruck $(1-\beta_*)$ im Zentrum eines Sterns mit gegebener Masse M .

$1-\beta_*$	$M\mu^2/\odot$	$1-\beta_*$	$M\mu^2/\odot$
0.01	0.56	0.50	15.49
0.03	1.01	0.60	26.52
0.10	2.14	0.70	50.92
0.20	3.83	0.80	122.5
0.30	6.12	0.85	224.4
0.40	9.62	0.90	519.6

Was können wir aus den vorstehenden Berechnungen schließen? Wir folgern, daß in dem Ausmaß, in welchem Gleichung (17) die Grundlage für das Gleichgewicht wirklicher Sterne bildet, auch die Kombination (3) von Naturkonstanten – die eine Masse der richtigen Größenordnung für die Messung von Sternmassen liefert – die Grundlage einer physikalischen Theorie über die Struktur der Sterne ist.

3. Haben Sterne genügend Energie, um abzukühlen?

Die gleiche Kombination (3) von Naturkonstanten erschien bald darauf in einem weit fundamentaleren Zusammenhang, nämlich bei der Auflösung eines Paradoxons, das *Eddington* als Aphorismus formuliert hatte: „a star will need energy to cool“. Dieses Paradoxon tauchte auf, als man angesichts der damals neuen Erkenntnisse über Weiße Zwerge, z. B. den Sirius-Begleiter, mit mittleren Dichten im Bereich von 10^5 – 10^7 g cm $^{-3}$ nach dem letztendlichen Schicksal der gasförmigen Sterne fragte. *Eddington*^[3] stellte fest:

I do not see how a star which has once got into this compressed state is ever going to get out of it. ... It would seem that the star will be in an awkward predicament when its supply of subatomic energy fails.

Das von *Eddington* aufgestellte Paradoxon wurde von *R. H. Fowler*^[4] mit klareren physikalischen Begriffen neu formuliert:

The stellar material, in the white-dwarf state, will have radiated so much energy that it has less energy than the same matter in normal atoms expanded at the absolute zero of temperature. If part of it were removed from the star and the pressure taken off, what could it do?

Quantitativ läßt sich *Fowlers* Frage wie folgt ausdrücken:

Eine Abschätzung der elektrostatischen Energie E_v pro Volumeneinheit einer Anordnung von Atomen der Ordnungszahl Z , die bis zum nackten Kern ionisiert sind, ergibt

$$E_v \approx 1.32 \times 10^{11} Z^2 \rho^{4/3} \quad (18)$$

während die kinetische Energie der thermischen Bewegung, E_{kin} , pro Volumeneinheit freier Teilchen als ideales

Gas der Dichte ρ und der Temperatur T gegeben ist durch

$$E_{kin} = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu H} \rho T = \frac{1.24 \times 10^8}{\mu} \rho T \quad (19)$$

Wenn nun der Druck aufgehoben wird, kann die Materie nur dann den Zustand normaler Atome wiedererlangen, wenn

$$E_{kin} > E_v \quad (20)$$

oder gemäß Gleichung (18) und (19) nur, wenn gilt

$$\rho < \left(0.94 \times 10^{-3} \frac{T}{\mu Z^2} \right)^3 \quad (21)$$

Diese Ungleichung wird sicherlich bei genügend hoher Dichte verletzt werden. Dies ist die Essenz des *Eddingtonschen* Paradoxons, so wie es von *Fowler* formuliert wurde. *Fowler* löste dieses Paradoxon 1926 in einer Veröffentlichung^[4] mit dem Titel „Dense Matter“ – einer der bahnbrechenden Veröffentlichungen auf dem Gebiet der Sternstrukturen: In ihr wurden erstmals Fermi-Statistik und Elektronenentartung eingeführt.

4. *Fowlers* Lösung für *Eddingtons* Paradoxon; die Entartung der Elektronen in den Weißen Zwergen

In einem vollständig entarteten Elektronengas wird der gesamte zur Verfügung stehende Phasenraum mit Impulsen, die kleiner als ein bestimmter Schwellenwert p_0 – die Fermi-Kante – sind, unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips besetzt; d. h. je zwei Elektronen nehmen eine „Zelle“ mit dem Volumen h^3 des sechsdimensionalen Phasenraums ein. Daher gilt, wenn $n(p)dp$ die Anzahl der Elektronen pro Einheitsvolumen zwischen p und $p+dp$ bedeutet, daß die Annahme vollständiger Elektronenentartung gleichwertig mit folgender Behauptung ist:

$$n(p) = \begin{cases} \frac{8\pi}{h^3} p^2 & (p \leq p_0) \\ 0 & (p > p_0) \end{cases} \quad (22)$$

Der Wert des Fermi-Impulses p_0 ist durch die Normierungsbedingung bestimmt

$$n = \int_0^{p_0} n(p) dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_0^3 \quad (23)$$

wobei mit n die Gesamtzahl der Elektronen im Einheitsvolumen bezeichnet wird.

Für die durch (22) gegebene Verteilung betragen der Druck P und die kinetische Energie E_{kin} der Elektronen (pro Einheitsvolumen)

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_0} p^3 v_p dp \quad (24)$$

und

$$E_{kin} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_0} p^2 T_p dp \quad (25)$$

wobei v_p und T_p die Geschwindigkeit bzw. die kinetische Energie eines Elektrons mit dem Impuls p ist.

Beim Einsetzen der für nichtrelativistische Mechanik gültigen Beziehungen

$$v_p = p/m \quad \text{und} \quad T_p = p^2/2m \quad (26)$$

in (24) und (25) ergeben sich

$$P = \frac{8\pi}{15h^3m} p_0^5 = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m} n^{5/3} \quad (27)$$

und

$$E_{\text{kin}} = \frac{8\pi}{10h^3m} p_0^5 = \frac{3}{40} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m} n^{5/3} \quad (28)$$

Fowlers Lösung des Eddingtonschen Paradoxons besteht aus folgendem: Bei den Temperaturen und Dichten, die im Innern von Weißen Zwergen erwartet werden, sind die Elektronen hochgradig entartet, und E_{kin} muß gemäß Gleichung (28) und *nicht* gemäß Gleichung (19) bestimmt werden. Gleichung (28) ergibt

$$E_{\text{kin}} = 1.39 \times 10^{13} (\rho/\mu)^{5/3} \quad (29)$$

Beim Vergleich der beiden Abschätzungen (18) und (29) sehen wir nun, daß bei Materie mit Dichten von $\rho \approx 10^5 \text{ g cm}^{-3}$, wie sie in Weißen Zwergen vorkommen, die gesamte kinetische Energie etwa zwei- bis viermal so groß ist wie der Betrag der negativen potentiellen Energie. Somit taucht das Eddingtonsche Paradoxon gar nicht auf. Fowler schloß seine Veröffentlichung mit der äußerst scharfsichtigen Bemerkung:

The black-dwarf material is best likened to a single gigantic molecule in its lowest quantum state. On the Fermi-Dirac statistics, its high density can be achieved in one and only one way, in virtue of a correspondingly great energy content. But this energy can no more be expended in radiation than the energy of a normal atom or molecule. The only difference between black-dwarf matter and a normal molecule is that the molecule can exist in a free state while the black-dwarf matter can only so exist under very high external pressure.

5. Die Theorie der Weißen Zwerge; die Grenzmasse

Die mit dem Druck P verknüpfte innere Energie ($=3P/2$) eines entarteten Elektronengases ist die *Nullpunktenergie*. Der wesentliche Inhalt von Fowlers Veröffentlichung ist nun folgender: Diese Nullpunktenergie ist so groß, daß man bei Sternen einen Endzustand erwarten kann, in dem alle Energie von dieser Art ist. Fowlers Argument kann klarer in folgender Weise^[5] formuliert werden:

Mit Gleichung (27) für den Druck bekommt man die Beziehung

$$P = K_1 \rho^{5/3} \quad \text{wobei} \quad K_1 = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m(\mu_e H)^{5/3}} \quad (30)$$

in der μ_e das mittlere Molekulargewicht pro Elektron bedeutet. Eine Gleichgewichtskonfiguration, in welcher der Druck P und die Dichte ρ wie angegeben

$$P = K \rho^{1+1/n} \quad (31)$$

miteinander verknüpft sind, nennt man ein Emden-Polytrop vom Index n . Die entarteten, auf der Zustandsgleichung (30) aufgebauten Konfigurationen sind demnach Polytrope vom Index $3/2$. Die Theorie der Polytrope ergibt sofort den Ausdruck

$$K_1 = 0.4242 (GM^{1/3} R) \quad (32)$$

oder numerisch, wobei K_1 durch Gleichung (30) gegeben ist

$$\log_{10}(R/R_\odot) = -\frac{1}{3} \log_{10}(M/\odot) - \frac{5}{3} \log_{10} \mu_e - 1.397 \quad (33)$$

Für eine Masse gleich der Sonnenmasse und $\mu_e = 2$ sagt Beziehung (33) einen Radius $R = 1.26 \times 10^{-2} R_\odot$ und eine mittlere Dichte von $7 \times 10^5 \text{ g/cm}^3$ voraus. Diese Radien und Dichten sind genau von der Größe, wie man sie bei Weißen Zwergen antrifft. Außerdem ist gemäß Gleichung (32) und (33) der Radius der Weiße-Zwerg-Konfiguration umgekehrt proportional zur Kubikwurzel der Masse. Demgemäß werden endliche Gleichgewichtskonfigurationen für alle Massen vorhergesagt, und nach und nach wurde die Idee akzeptiert, daß die Weißen Zwerge die letzte Phase in der Entwicklung aller Sterne repräsentieren.

Es wurde jedoch bald klar, daß die einfache, auf Fowlers Annahmen aufbauende Theorie modifiziert werden mußte. Elektronen in der Nähe der Fermi-Energie haben in den Zentren von entarteten Sternen Geschwindigkeiten, die mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar werden, wenn die Masse der Sterne zunimmt. So ist bei einem entarteten Stern bereits von einer Sonnenmasse (mit $\mu_e = 2$) die Dichte im Zentrum $\rho_c = 4.19 \times 10^6 \text{ g/cm}^3$ (d. h. ungefähr das Sechsfache der mittleren Dichte). Dieser Dichte entsprechen ein Fermi-Impuls $p_0 = 1.29 mc$ und eine Geschwindigkeit von $0.63c$. Folglich muß die Zustandsgleichung modifiziert werden, um die Effekte der speziellen Relativität zu berücksichtigen. Dies ist leicht getan, indem man in Gleichung (24) und (25) die Beziehungen

$$v_p = \frac{p}{m(1+p^2/m^2c^2)^{1/2}} \quad (34)$$

$$T_p = mc^2[(1+p^2/m^2c^2)^{1/2} - 1]$$

anstelle der nichtrelativistischen Ausdrücke (26) einsetzt. Wir finden, daß die daraus folgende Zustandsgleichung parametrisiert angegeben werden kann durch

$$P = Af(x) \quad \text{und} \quad \rho = Bx^3 \quad (35)$$

wobei

$$A = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3}, \quad B = \frac{8\pi m^3 c^3 \mu_e H}{3h^3} \quad (36)$$

und

$$f(x) = x(x^2 + 1)^{1/2} (2x^2 - 3) + 3 \sinh^{-1} x \quad (37)$$

und ähnlich

$$E_{\text{kin}} = A g(x) \quad (38)$$

wobei

$$g(x) = 8x^3 [(x^2 + 1)^{1/2} - 1] - f(x) \quad (39)$$

Gemäß Gleichung (35) und (36) wird der Druck für genügend geringe Elektronenkonzentrationen ($x \ll 1$) durch Beziehung (30) angenähert. Mit steigenden Elektronenkonzentrationen ($x \gg 1$) tendiert der Druck jedoch in Richtung^[6]

$$P = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} h c n^{4/3} \quad (40)$$

Diese Grenzbeziehung erhält man sehr einfach, indem man $v_p = c$ in Gleichung (24) einsetzt. Dann ist

$$P = \frac{8\pi c}{3h^3} \int_0^{p_0} p^3 dp = \frac{2\pi c}{3h^3} p_0^4 \quad (41)$$

Eliminieren von p_0 unter Anwendung von Gleichung (23) führt direkt zu Gleichung (40).

Obwohl die von der speziellen Relativitätstheorie geforderte Änderung der Zustandsgleichung harmlos erscheint, hat sie doch, wie wir gleich sehen werden, einen drastischen Einfluß auf die vorausgesagte Masse-Radius-Beziehung für entartete Konfigurationen.

Der Zusammenhang zwischen P und ρ gemäß der Grenzbeziehung (41) ist

$$P = K_2 \rho^{4/3} \quad \text{wobei} \quad K_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{h c}{(\mu_e H)^{4/3}} \quad (42)$$

Bei dieser Grenze ist die Konfiguration ein Emden-Polytrop vom Index 3. Man weiß genau, daß die resultierende Gleichgewichtskonfiguration beim Polytropindex 3 eindeutig durch den Proportionalitätsfaktor K_2 in der Druck-Dichte-Beziehung bestimmt ist. Wir erhalten entsprechend

$$\begin{aligned} M_{\text{limit}} &= 4\pi \left(\frac{K_2}{\pi G} \right)^{3/2} (2.018) \\ &= 0.197 \left(\frac{h c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e H)^2} = 5.76 \mu_e^{-2} \odot \end{aligned} \quad (43)$$

(In Gleichung (43) ist 2.018 eine numerische Konstante, die aus der expliziten Lane-Emden-Gleichung mit $n=3$ hergeleitet wurde.)

Aus allgemeinen Überlegungen^[7] geht hervor, daß die exakte Masse-Radius-Relation für entartete Konfigurationen eine Obergrenze für die Masse von Konfigurationen er-

geben muß, für welche Gleichung (43) gilt. Außerdem muß die mittlere Dichte der Konfigurationen gegen Unendlich streben, während der Radius gegen Null und $M \rightarrow M_{\text{limit}}$ geht. Diese Bedingungen, einfach wie sie sind, können direkt durch Betrachtung des Gleichgewichts der Konfigurationen gewonnen werden, die auf der exakten Zustandsgleichung aufgebaut sind, die in Gleichung (35)–(37) gegeben ist. Man findet, daß die Gleichung, die das Gleichgewicht solcher Konfigurationen bestimmt, in eine einfachere Form gebracht werden kann^[8,9]:

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{d\phi}{d\eta} \right) = - \left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2} \quad (44)$$

wobei

$$y_0^2 = x_0^2 + 1 \quad (45)$$

$m c x_0$ gibt den Fermi-Impuls der Elektronen im Zentrum der Konfiguration an, und η mißt die radiale Entfernung in Einheiten von

$$\left(\frac{2A}{\pi G} \right)^{1/2} \frac{1}{B y_0} = l_1 y_0^{-1} \quad (46)$$

Wenn wir Gleichung (44) innerhalb geeigneter Grenzen und unter verschiedenen vorgegebenen y_0 -Werten integrieren, können wir sowohl die exakte Masse-Radius-Beziehung als auch die anderen Gleichgewichtseigenschaften der entarteten Konfigurationen herleiten. Die Hauptresultate solcher Rechnungen sind in Abbildung 2 und 3 dargestellt.

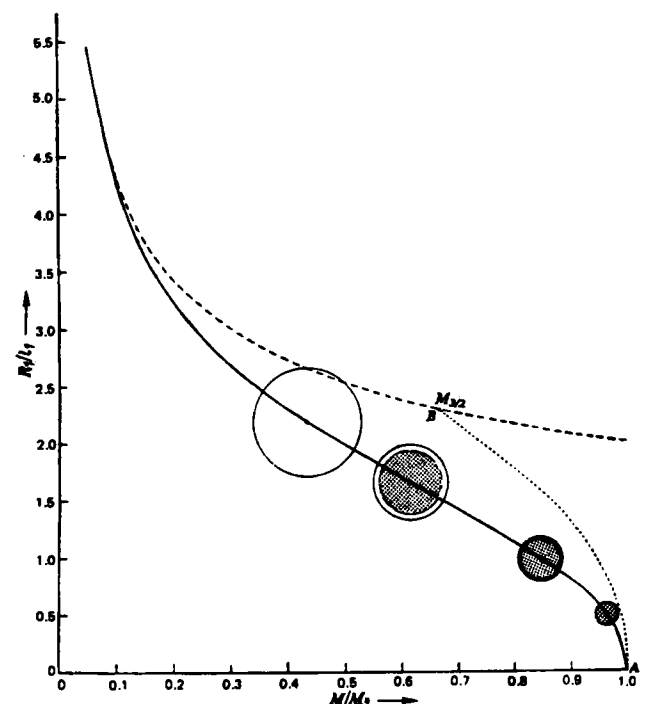


Abb. 2. Die durchgezogene Kurve zeigt die exakte Masse-Radius-Beziehung (l_1 ist in Gleichung (46) definiert, und M_3 bedeutet die Grenzmasse). Diese Kurve geht asymptotisch in die gestrichelte Kurve für entartete Konfigurationen kleiner Massen über, die mit dem Polytrop vom Index 3/2 angenähert wird. Die Bereiche der Konfigurationen, die als relativistisch ($\rho > (K_1/K_2)^3$) betrachtet werden können, sind schraffiert (aus [9]).

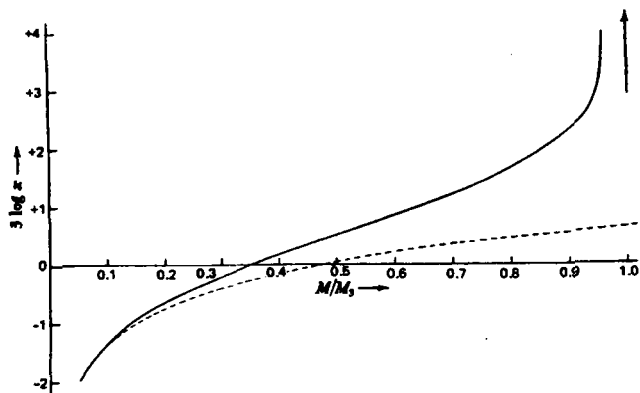


Abb. 3. Die durchgezogene Kurve zeigt die exakte Masse-Dichte-Beziehung für stark kollabierte Konfigurationen. Diese Kurve geht für $M \rightarrow 0$ asymptotisch in die gepunktete Kurve über (aus [9]).

Die wichtigsten Schlußfolgerungen, die wir aus den obigen Betrachtungen ziehen können, sind: *Erstens* gibt es eine Obergrenze, M_{limit} , für die Masse von Sternen, die sich in ihrer Endphase zu entarteten Konfigurationen entwickeln können. *Zweitens* müssen Sterne mit $M > M_{\text{limit}}$ Endstadien haben, die sich nicht anhand der bis jetzt besprochenen Überlegungen vorhersagen lassen. Und schließlich sehen wir, daß die Kombination (3) von Naturkonstanten jetzt im fundamentalen Zusammenhang mit M_{limit} in Gleichung (43) wieder auftaucht: Ihre Bedeutung für die Theorie der Struktur und der Entwicklung der Sterne kann nicht länger angezweifelt werden.

6. Unter welchen Bedingungen können normale Sterne entartete „Cores“ entwickeln?

Nachdem die Obergrenze für die Masse von völlig entarteten Konfigurationen eingeführt war, mußte die Frage beantwortet werden, wie man ihre Existenz mit der Entwicklung der Sterne unter Veränderung ihres gasförmigen Zustands in Verbindung bringen kann. Wenn ein Stern eine kleinere Masse als M_{limit} hat, erscheint es vernünftig anzunehmen, daß er einmal in einen völlig entarteten Zustand übergeht. Aber was geschieht, wenn seine Masse größer als M_{limit} ist? Man suchte in Gleichungen und Ungleichungen, wie sie in Abschnitt 2 und 3 aufgeführt sind, nach Hinweisen auf das, was sich ergeben könnte^[10,11].

Die erste Frage betrifft die Umstände, unter denen ein ursprünglich gasförmiger Stern einen entarteten Core bildet. Von der Physik her kann die Frage, wann die Abweichung von der Zustandsgleichung (5) für ideale Gase einsetzt und wann sich Effekte der Elektronenentartung manifestieren, sofort beantwortet werden.

Nehmen wir z. B. an, daß wir die Dichte bei konstanter Temperatur gleichmäßig und kontinuierlich erhöhen, und zwar für eine Ansammlung von freien Elektronen und Atomkernen, die sich in einem hochionisierten Zustand befinden und die zunächst der Zustandsgleichung (5) für ideale Gase gehorchen. Zuerst wird der Elektronendruck linear mit ρ wachsen, aber bald setzen Abweichungen ein, und schließlich wird die Dichte gemäß der Zustandsgleichung für ein völlig entartetes Elektronengas zunehmen (siehe Abb. 4). Bemerkenswert ist die Tatsache, daß diese Grenzform der Zustandsgleichung unabhängig von der Temperatur ist.

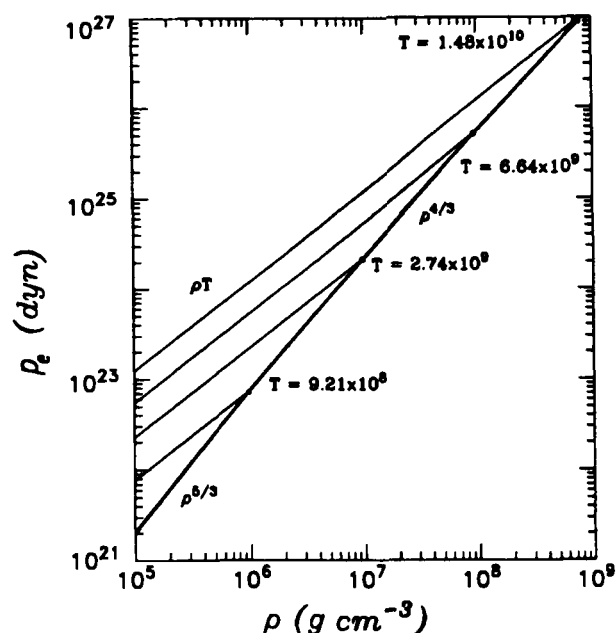


Abb. 4. Gezeigt ist hier, wie bei steigender Dichte und konstanter Temperatur immer Entartung einsetzt.

Die Umstände, unter denen in einem Stern während seiner Entwicklung ein entarteter Core entsteht, lassen sich jedoch leichter untersuchen, wenn man den Elektronendruck (so wie er durch die klassische Zustandsgleichung für ideale Gase gegeben ist) als Funktion von ρ und β_e [siehe Gleichung (7)] ausdrückt

$$p_e = \frac{k}{\mu_e H} \rho T = \frac{\beta_e}{1 - \beta_e} \frac{1}{3} a T^4 \quad (47)$$

wobei p_e jetzt den Elektronendruck angibt. Wir können dann analog zu Gleichung (9) schreiben

$$p_e = \left[\left(\frac{k}{\mu_e H} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1 - \beta_e}{\beta_e} \right]^{1/3} \rho^{4/3} \quad (48)$$

Wenn wir dies mit Gleichung (42) vergleichen, schließen wir, daß für den Fall

$$\left[\left(\frac{k}{\mu_e H} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1 - \beta_e}{\beta_e} \right]^{1/3} > K_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{h c}{(\mu_e H)^{4/3}} \quad (49)$$

der Druck p_e , der durch die klassische Zustandsgleichung für ideale Gase bestimmt ist, größer sein wird als derjenige, der sich für den entarteten Zustand errechnen läßt, und dies nicht nur für vorgegebene ρ und T , sondern für *alle* ρ und T zum gleichen Wert β_e .

Setzen wir für a den Wert aus Gleichung (13) ein, so finden wir, daß die Ungleichung (49) sich reduziert auf

$$\frac{960}{\pi^4} \frac{1 - \beta_e}{\beta_e} > 1 \quad (50)$$

oder, was gleichbedeutend ist, auf

$$1 - \beta_e > 0.0921 = 1 - \beta_w \quad (51)$$

(siehe Abb. 5).

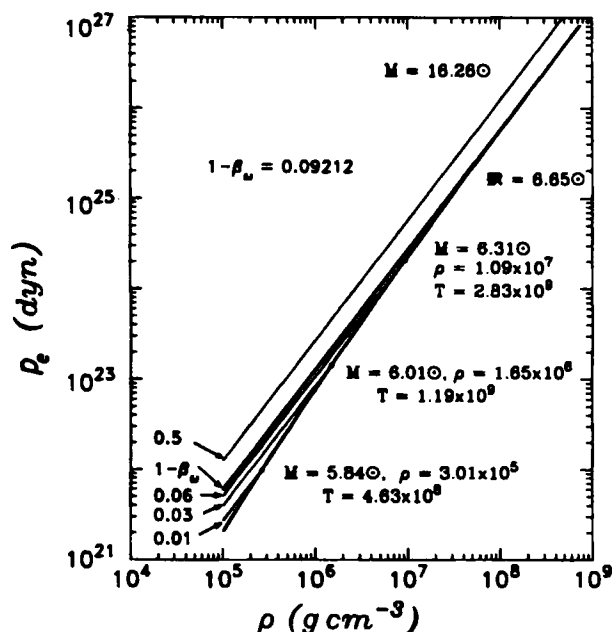


Abb. 5. Gezeigt ist der Beginn der Entartung für steigende Dichte bei konstantem β . Man beachte, daß es keine Überschneidungen für $1-\beta > 0.09212$ gibt. In der Abbildung ist zu $1-\beta$ jeweils die Masse eines Sterns, der dem Standardmodell entspricht, angegeben.

Die wichtigste Aussage von Ungleichung (51) für unsere Betrachtungen ist das Kriterium, daß der Strahlungsdruck kleiner als 9.2% von $(p_e + p_{\text{rad}})$ sein muß, damit ein Stern entarten kann. Diese letzte Folgerung ist von solch zentraler Bedeutung für alle modernen Modelle der Sternentwicklung, daß es sich lohnt, die Argumente aus der Frühzeit wegen ihrer Direktheit und Einfachheit zu wiederholen.

Die beiden Hauptelemente dieser Argumente waren folgende: *Erstens* wird der Strahlungsdruck mit steigender Masse zunehmend größer; *zweitens* ist die Entartung der Elektronen nur solange möglich, wie der Strahlungsdruck keinen wesentlichen Anteil des Gesamtdrucks bildet – wir haben bereits gesehen, daß er 9.2% von $(p_e + p_{\text{rad}})$ nicht übersteigen darf. Das zweite Element dieser Argumente ist eine direkte und elementare Konsequenz der Physik der Entartung; das erste erfordert jedoch eine nähere Betrachtung.

Daß der Strahlungsdruck eine zunehmend wichtiger werdende Rolle spielen muß, wenn die Masse des Sterns wächst, war eines der ersten Ergebnisse von *Eddington* bei seinen Untersuchungen von Sternstrukturen. Ein quantitativer Ausdruck für diesen Sachverhalt ist *Eddingtons Standardmodell*. Es bildete die Grundlage seiner frühen Untersuchungen, die er in seinem Buch „The Internal Constitution of the Stars“ zusammengefaßt hat.

Im Standardmodell ist der Bruch β (= Gasdruck/Gesamtdruck) im gesamten Stern konstant. Mit dieser Annahme ist der Stern ein Polytrop vom Index 3, was aus Gleichung (9) hervorgeht. Folglich haben wir die Beziehung [vgl. Gleichung (43)]

$$M = 4\pi \left(\frac{C(\beta)}{\pi G} \right)^{3/2} \quad (2.018) \quad (52)$$

wobei $C(\beta)$ durch Gleichung (9) definiert ist. Gleichung (52) liefert einen quadratischen Ausdruck für β , analog zu Gleichung (17) für β_* . Für $\beta = \beta_*$ ergibt Gleichung (52)

$$M = 0.197 \beta_*^{-3/2} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e H)^2} = 6.65 \mu_e^{-2} \odot = \mathcal{M} \quad (53)$$

Gemäß dem Standardmodell haben Sterne mit größerer Masse als \mathcal{M} einen Strahlungsdruck, der 9.2% des Gesamtdrucks übersteigt. Folglich können Sterne mit $M > \mathcal{M}$ in keiner Entwicklungsphase im Innern entarten. Daher ist für solche Sterne eine Weiße-Zwerg-Konfiguration nicht möglich, es sei denn, sie könnten einen wesentlichen Teil ihrer Masse ausstoßen.

Das Standardmodell ist natürlich nur ein Modell. Dennoch bestätigte die Erfahrung, außer für die unten kurz erwähnten speziellen Verhältnisse, daß die Schlußfolgerungen aus dem Standardmodell im wesentlichen qualitativ korrekt sind; Sterne mit Massen größer als 7–8 \odot müssen sich völlig anders entwickeln als masseärmere Sterne. Diese Schlußfolgerungen, zu denen man schon vor etwa fünfzig Jahren gekommen war, erschienen damals so überzeugend, daß Behauptungen wie die folgenden ohne Bedenken aufgestellt wurden:

Given an enclosure containing electrons and atomic nuclei (total charge zero) what happens if we go on compressing the material indefinitely? (1932)^[10].

The life history of a star of small mass must be essentially different from the life history of a star of large mass. For a star of small mass the natural white-dwarf stage is an initial step towards complete extinction. A star of large mass cannot pass into the white-dwarf stage and one is left speculating on other possibilities (1934)^[8].

Diese Aussagen haben ihre Gültigkeit behalten.

Während die Entwicklung massereicher Sterne somit unsicher blieb, gab es bezüglich des Endzustands der Sterne mit genügend kleiner Masse diese Unsicherheit nicht^[11]. Den Grund dafür entnimmt man wieder aus Gleichung (10); der maximal erreichbare Druck in einem Stern muß danach kleiner sein als der von der Gleichung für den entarteten Zustand gelieferte Druck, solange gilt

$$\frac{1}{2} G \left(\frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} M^{2/3} < K_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{hc}{(\mu_e H)^{4/3}} \quad (54)$$

oder, was gleichbedeutend ist,

$$M < \frac{3}{16\pi} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e H)^2} = 1.74 \mu_e^{-2} \odot \quad (55)$$

Wir schließen daraus, daß es bei der Entwicklung von Sternen mit Massen kleiner als 0.43 \odot (wenn $\mu_e = 2$) keine Überraschungen gibt. Der Endzustand eines solchen Sterns kann nur ein Weißer Zwerg sein. (Wir wollen am Rande erwähnen, daß die Ungleichung (55) impliziert, daß die sogenannten Schwarzen „Mini“-Löcher von der Masse $\approx 10^{15}$ g im gegenwärtigen astronomischen Universum auf keine natürliche Art gebildet werden können.)

7. Einige Bemerkungen über jüngste Fortschritte bei der Entwicklung massereicher Sterne und dem Einsetzen des Gravitationskollaps

Es wurde bereits aufgrund früherer Überlegungen klar, daß die Unfähigkeit der massereichen Sterne, in Weiße Zwerge überzugehen, zur Entwicklung wahrhaft extremer Bedingungen in ihrem Innern führen muß; schließlich setzt der Gravitationskollaps ein, der vom Supernova-Phänomen begleitet ist. Aber trotz großer Anstrengungen mehrerer kompetenter Arbeitsgruppen war es schwierig gewesen, den genauen Ablauf aller dieser Vorgänge zu ermitteln. Dabei scheinen folgende Tatsachen berücksichtigt werden zu müssen^[*]:

Im ersten Augenblick werden Dichte und Temperatur stetig steigen, ohne durch Entartungseffekte gehemmt zu werden, da für massereiche Sterne $(1-\beta_e) > (1-\beta_\omega)$ gilt. Deshalb wird die „nucleare Verbrennung“ von, sagen wir, Kohlenstoff gezündet, die von Neutrinoemission begleitet ist. Diese Neutrinoemission bewirkt eine Abkühlung und eine Verringerung von $(1-\beta_e)$; es bleibt aber immer noch größer als $(1-\beta_\omega)$. Wichtig ist hier, daß die Neutrinoemission selektiv vom Zentrum kommt und somit $(1-\beta_e)$ in eben diesem innersten Gebiet erniedrigt. Dichte und Temperatur steigen weiterhin an, bis die nucleare Verbrennung von Neon gezündet wird, wobei weitere Neutrinos emittiert werden und $(1-\beta_e)$ weiter verringert wird. Diese Sequenz von nuclearer Verbrennung und Erniedrigung von $(1-\beta_e)$ setzt sich fort, bis $(1-\beta_e) < (1-\beta_\omega)$, und bis sich im Zentrum ein relativistischer Core mit einer Masse von ungefähr der Größe der Grenzmasse ($= 1.4 \odot$ für $\mu_e = 2$) gebildet hat. In diesem Zustand oder kurz danach erwartet man, daß eine gewisse Instabilität einsetzt (siehe Abschnitt 8), welcher der Gravitationskollaps und das Supernova-Phänomen (Typ II) folgen. In einigen Fällen wird das, was der hochrelativistisch entartete Core von ungefähr $1.4 \odot$ war, als Neutronenstern übrigbleiben. Daß dies gelegentlich geschieht, wird durch den Befund erhärtet, daß für die Pulsare, für die zuverlässige Massenangaben existieren, die Werte konsistent nahezu $1.4 \odot$ betragen. In anderen Fällen jedoch – vielleicht in der Mehrzahl der Fälle – wird das, was übrig bleibt, nachdem sich „der Staub gesetzt hat“, eine größere Masse haben, als sie für stabile Neutronensterne erlaubt ist; in diesen Fällen bilden sich Schwarze Löcher.

Im Fall von weniger massereichen Sternen ($M \approx 6-8 \odot$) sind die zunächst gebildeten entarteten Cores nicht hochrelativistisch. Aber die Masse des Cores nimmt zu, je weiter der nucleare Brennstoff an der Grenzschicht zwischen Core und Mantel verbrennt. Wenn dann der Core die Grenzmasse erreicht, tritt Instabilität ein, und der Stern explodiert; man nimmt an, daß dies die Ursache für das Supernova-Phänomen vom Typ I ist.

Die vorausgegangene kurze Beschreibung dessen, was während der Spätphase der Entwicklung massereicher Sterne geschehen kann, macht deutlich, daß Probleme von außergewöhnlicher Komplexität auftreten, wobei eine reiche Vielfalt physikalischer Faktoren miteinander konkurrieren. Dies ist nicht die Gelegenheit, alle solche Fragen detailliert zu diskutieren.

[*] Ich danke Professor D. Arnett für seine Hilfe bei der Durchsicht der neuesten Literatur und für seinen Rat beim Verfassen dieses Abschnitts.

8. Instabilitäten relativistischen Ursprungs: (1) Vibrationsinstabilität kugelsymmetrischer Sterne

Ich wende mich nun der Betrachtung bestimmter Typen von stellaren Instabilitäten zu, die auf Effekten der allgemeinen Relativität beruhen und für die sich kein Gegenstück in der Newtonschen Mechanik finden läßt. Es sieht so aus, als ob diese neuen Typen von Instabilitäten relativistischen Ursprungs eine wesentliche Rolle bei den Diskussionen um den Gravitationskollaps und den Endzustand der Entwicklung massereicher Sterne spielen werden.

Wir werden zuerst die Stabilität kugelsymmetrischer Sterne bei rein radialen Störungen betrachten. Das Kriterium für diese Stabilität folgt direkt aus den linearisierten Gleichungen für die kugelsymmetrischen radialen Oszillationen eines Sterns. Die Stabilität gegenüber radialen Störungen hängt in der Newtonschen Gravitationstheorie nur von einem mittleren Wert des adiabatischen Exponenten Γ_1 ab, der definiert ist als Verhältnis der Änderungen von Druck und Dichte, die ein Flüssigkeitselement in einem Bezugssystem erfährt, das sich mit der Flüssigkeit bewegt. Daher gilt

$$\Delta P/P = \Gamma_1 \Delta \rho/\rho \quad (56)$$

Das Newtonsche Kriterium lautet

$$\bar{\Gamma}_1 = \int_0^M \Gamma_1(r) P(r) dM(r) \div \int_0^M P(r) dM(r) > \frac{4}{3} \quad (57)$$

Für $\bar{\Gamma}_1 < 4/3$ folgen *dynamische Instabilitäten* von globalem Charakter mit einer Anwachszeit auf das e-Fache (e-folding time), die durch die Zeit, die eine Schallwelle vom Mittelpunkt zur Oberfläche braucht, gegeben ist.

Untersucht man das gleiche Problem mit der allgemeinen Relativitätstheorie, so findet man^[12], daß die Stabilität wieder von einem mittleren Wert Γ_1 abhängt. Aber im Gegensatz zum Newtonschen Ergebnis hängt die Stabilität auch noch vom Radius des Sterns ab. Daher tritt Instabilität auf, wie groß $\bar{\Gamma}_1$ auch sein mag, wenn der Radius kleiner als ein bestimmtes Vielfaches des *Schwarzschild-Radius* ist:

$$R_s = 2GM/c^2 \quad (58)$$

Daher wird, wenn wir der Einfachheit halber Γ_1 im gesamten Stern konstant und gleich $5/3$ setzen, der Stern bei $R_1 < 2.4 R_s$ dynamisch instabil gegenüber radialen Störungen. Bei $\Gamma_1 \rightarrow \infty$ wird darüber hinaus Instabilität für alle $R < (9/8) R_s$ einsetzen. Tatsächlich wird durch $9/8 R_s$ der kleinste Radius definiert, den eine Gravitation aufweisende Masse im hydrostatischen Gleichgewicht aufgrund der allgemeinen Relativität einnehmen kann. Dieses wichtige Ergebnis wurde von *Karl Schwarzschild* 1916 implizit in einer fundamentalen Veröffentlichung publiziert. (*Schwarzschild* hatte in seiner Arbeit bewiesen, daß für Sterne mit gleichförmiger Energieverteilung $R > (9/8) R_s$ gilt.)

In einem Sinne ist folgendes die wichtigste Konsequenz dieser relativistischen Instabilität: Wenn Γ_1 sich von $4/3$ nur um eine kleine positive Konstante unterscheidet, wird die Instabilität bei einem Radius einsetzen, der ein großes

Vielfaches von R_s ist. (Der Einfachheit halber wird Γ_1 als konstant angenommen.) Dies gilt demnach unter Bedingungen, unter denen die Effekte der allgemeinen Relativität auf die Struktur der Gleichgewichtskonfiguration selbst kaum relevant sind. Tatsächlich folgt^[13] aus den Gleichungen für die radialen Oszillationen eines Sterns in der ersten Post-Newtonschen Näherung der allgemeinen Relativitätstheorie, daß die Instabilität der radialen Störungen für alle

$$R < \frac{K}{\Gamma_1 - 4/3} \frac{2GM}{c^2} \quad (59)$$

einsetzen wird, wobei K eine Konstante ist, die vom gesamten^[1] Dichte-Druck-Profil in der Gleichgewichtskonfiguration im Rahmen der Newtonschen Theorie abhängt. Der Wert dieser Konstante ist zum Beispiel für ein Polytrop vom Index n gegeben durch

$$K = \frac{5-n}{18} \left[\frac{2(11-n)}{(n+1)\xi_1^4 |\theta'_1|^3} \int_0^{\xi_1} \theta \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 \xi^2 d\xi + 1 \right] \quad (60)$$

wobei θ die Lane-Emden-Funktion in ihrer Standardnormierung ist ($\theta = 1$ bei $\xi = 0$). ξ ist die dimensionslose radiale Koordinate, ξ_1 definiert den Randwert des Polytrops (wo $\theta = 0$), und θ'_1 ist die Ableitung von θ an der Stelle ξ_1 .

In Tabelle 2 sind Werte der Konstante K für verschiedene Polytrop-Indices n zusammengestellt. Man beachte im besonderen, daß K für $n \rightarrow 5$ ins Unendliche wächst und die Konfiguration sich zunehmend im Zentrum verdichtet^[**]. So beträgt K für $n = 4.95$ (für diesen Polytrop-Index gilt $\rho_c = 8.09 \times 10^6 \bar{\rho}$) bereits etwa 46. Mit anderen Worten: Die Instabilität relativistischen Ursprungs für im Zentrum stark verdichtete massereiche Sterne (bei denen Γ_1 sich von $4/3$ z. B. nur um 0.01 unterscheidet)^[***] beginnt bereits, wenn der Radius kleiner als $5 \times 10^3 R_s$ wird. Es ist klar, daß diese relativistische Instabilität im Zusammenhang mit diesen Problemen betrachtet werden muß.

Tabelle 2. Werte der Konstante K aus der Ungleichung (59) für verschiedene Polytrop-Indices n .

n	K	n	K
0	0.452381	3.25	1.28503
1.0	0.565382	3.5	1.49953
1.5	0.645063	4.0	2.25338
2.0	0.751296	4.5	4.5303
2.5	0.900302	4.9	22.906
3.0	1.12447	4.95	45.94

Eine weitere Anwendung der in Abschnitt 7 erörterten Resultate betrifft entartete Konfigurationen in der Nähe

[*] Aus diesem Grund wird die Instabilität *global* genannt.

[**] Inzwischen konnte gezeigt werden (S. Chandrasekhar, N. R. Lebovitz, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 207 (1984) 13 P), daß das asymptotische Verhalten von K für $n \rightarrow 5$ durch

$$K \rightarrow 2.3056/(5-n)$$

gegeben ist und daß außerdem das Instabilitätskriterium (59) in der alternativen Form

$$R < 0.2264 \left[\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} \right]^{1/3} \frac{2GM}{c^2} \frac{1}{\Gamma_1 - 4/3} \quad (\rho_c/\bar{\rho} \geq 10^6)$$

ausgedrückt werden kann.

[***] Das gilt unter der Bedingung, daß der Strahlungsdruck in diesen massereichen Sternen dominiert und β nahezu null ist.

der Grenzmasse^[14]. Die Elektronen in dieser hochrelativistischen Konfiguration haben nahezu Lichtgeschwindigkeit; der effektive Wert von Γ_1 wird deshalb sehr nahe bei $4/3$ liegen, und die Post-Newtonsche relativistische Instabilität wird für Massen einsetzen, die etwas kleiner als die Grenzmasse sind. Da die Instabilität gegen radiale Oszillationen bei kleineren Massen als der Grenzmasse beginnt, muß die Periode der Oszillation entlang der Abfolge der entarteten Konfigurationen ein Minimum haben. Dieses Minimum kann zu ungefähr zwei Sekunden abgeschätzt werden (Abb. 6). Als die Pulsare entdeckt wurden, konnte die Möglichkeit ausgeschlossen werden, daß es sich um entartete Konfigurationen in der Nähe der Grenzmasse handelt, denn man wußte, daß die Perioden der Pulsare viel kürzer als dieser Minimalwert sind. Dies war eines der entscheidenden Argumente für die Gleichsetzung von Pulsaren mit Neutronensternen. (Ironischerweise aber haben Pulsare, die aus Supernova-Explosionen hervorgehen, Massen in der Nähe von $1.4 \odot$! Die Gründe wurden kurz in Abschnitt 7 erläutert.)

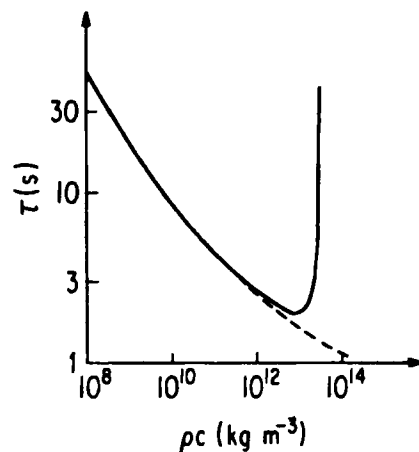


Abb. 6. Änderung der Periode radialer Oszillation entlang vollständig entarteter Konfigurationen. Man beachte, daß die Periode für eine Masse nahe der Grenzmasse gegen Unendlich strebt. Es muß daher eine minimale Periode für die Oszillationen entlang dieser Konfigurationen geben. Dieses Minimum beträgt ungefähr zwei Sekunden. (Aus J. Skilling: *Pulsating Stars*, Plenum Press, New York 1968, S. 59.)

Zum Schluß wollen wir anmerken, daß radiale Instabilität relativistischen Ursprungs die grundlegende Ursache für die *Existenz* einer maximalen stabilen Masse ist: Dies folgt direkt aus den Gleichungen, die in der allgemeinen Relativitätstheorie für das hydrostatische Gleichgewicht gelten. (Eine vollständige Abhandlung der Perioden radialer Oszillationen von Neutronensternen für verschiedene zulässige Zustandsgleichungen haben *Detweiler* und *Lindblom*^[15] kürzlich veröffentlicht.)

9. Instabilitäten relativistischen Ursprungs:

(2) Die säkulare Instabilität rotierender Sterne, abgeleitet von der Emission von Gravitationsstrahlung durch nichtaxialsymmetrische Modi von Oszillationen

Ich wende mich nun einer anderen Art von Instabilität zu, welche die allgemeine Relativitätstheorie für rotierende

Konfigurationen vorhersagt. Dieser neue Instabilitätstyp^[16] ist darauf zurückzuführen, daß die allgemeine Relativitätstheorie in rotierende Massen einen Dissipationsmechanismus einbaut, welcher von der Möglichkeit der Emission von Gravitationsstrahlung durch nichtaxialsymmetrische Modi von Oszillationen abgeleitet wird. Anscheinend limitiert diese Instabilität die Rotationsperioden von Pulsaren. Aber zuerst möchte ich Art und Ursprung dieses Instabilitätstyps erklären.

Es ist bekannt, daß eine mögliche Sequenz von Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Massen die Maclaurin-Reihe abgeplatteter Sphäroide ist^[17]. Wenn man die zweiten harmonischen Oszillationen des Maclaurin-Sphäroids in einem mit seiner Winkelgeschwindigkeit rotierenden Bezugssystem untersucht, findet man, daß für zwei dieser Modi, deren Abhängigkeit vom Azimutwinkel durch $e^{2i\phi}$ gegeben ist, die charakteristischen Oszillationsfrequenzen σ von der Exzentrizität e in der in Abbildung 7

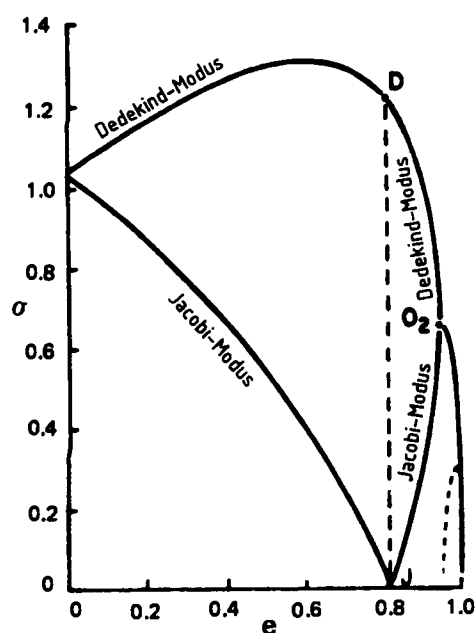


Abb. 7. Charakteristische Frequenzen (in Einheiten von $(\pi G\rho)^{1/2}$) für die beiden geraden Modi der zweiten harmonischen Oszillation des Maclaurin-Sphäroids. Die Jacobi-Reihe zweigt von der Maclaurin-Reihe durch den neutralen Modus ab, der bei $e=0.813$ marginal stabil wird ($\sigma=0$). Die Dedekind-Reihe zweigt durch den alternativen Modus bei D ab. Bei O_2 ($e=0.9529$) wird das Maclaurin-Sphäroid dynamisch instabil. Real- und Imaginärteil der Frequenz jenseits von O_2 sind durch ausgezogene bzw. gestrichelte Kurven dargestellt. Bei der Dissipation durch Viskosität wird Instabilität im Zweig des Jacobi-Modus induziert. Die Strahlungsrückwirkung bewirkt Instabilität im Zweig DO_2 des Dedekind-Modus.

dargestellten Art abhängen. Man sieht, daß einer dieser Modi für $e=0.813$ marginal stabil (neutraler Punkt) wird (d. h. $\sigma=0$) und daß die beiden Modi für $e=0.953$ ineinander übergehen und jenseits dieses Punktes den komplex konjugierten Wert des jeweils anderen Modus einnehmen. Demgemäß wird das Maclaurin-Sphäroid am letzteren Punkt (zuerst von Riemann gezeigt) dynamisch instabil. Andererseits geht der neutrale Modus bei $e=0.813$ darauf zurück, daß an diesem Punkt eine neue Gleichgewichtsreihe von triaxialen Ellipsoiden – den Jacobi-Ellipsoiden – abzweigt. Aufgrund dieses Befundes vermutete Lord Kelvin 1883:

if there be any viscosity, however slight.... the equilibrium beyond $e=0.81$ cannot be secularly stable.

Kelvins Gedankengang war folgender: Die Viskosität verteilt Energie, aber keinen Drehimpuls. Und da bei gleichem Drehimpuls das Jacobi-Ellipsoid einen niedrigeren Energieinhalt hat als ein Maclaurin-Sphäroid, könnte man erwarten, daß über die Viskosität die Überschußenergie des Maclaurin-Sphäroids verteilt wird, das sich dadurch in ein Jacobi-Ellipsoid mit niedrigerer Energie umwandeln wird. Eine detaillierte Berechnung^[18] der Effekte viskoser Dissipation auf die beiden Oszillations-Modi in Abbildung 7 bestätigt Lord Kelvins Vermutung. Man findet, daß viskose Dissipation den Modus, welcher bei $e=0.813$ marginal stabil ist, jenseits dieses Punktes mit einer Anwachszeit auf das e -Fache instabil macht, die der Größe der kinematischen Viskosität umgekehrt proportional ist und monoton bis auf Null fällt, und zwar am Punkt $e=0.953$, an dem dynamische Instabilität einsetzt.

Da die Aussendung von Gravitationsstrahlung sowohl Energie als auch Drehimpuls dissipiert, veranlaßt diese keine Instabilität im Jacobi-Modus. Stattdessen gibt sie Anlaß zur Instabilität im alternativen Modus bei gleicher Exzentrizität. Auf den ersten Blick mag dies überraschend erscheinen, aber die Situation, der wir hier begegnen, klärt einige wichtige Sachverhalte.

Hätten wir die normalen Modi im Inertialsystem statt in einem rotierenden Bezugssystem analysiert, so hätten wir gesehen, daß der Modus, der durch Strahlungsrückwirkung bei $e=0.813$ instabil wird, tatsächlich an diesem Punkt marginal stabil ist. Das neutrale Verhalten dieses Modus im Inertialsystem ist damit in Einklang, daß die neutrale Deformation an diesem Punkt mit der Abzweigung einer neuen triaxialen Reihe an diesem Punkt – der Reihe der Dedekind-Ellipsoide – verknüpft werden kann. Diese Dedekind-Ellipsoide sind zwar kongruent mit den Jacobi-Ellipsoiden, unterscheiden sich von ihnen aber dadurch, daß sie im Inertialsystem ruhen und ihre triaxiale Form interner Wirbelbewegung verdanken. Aus diesen Befunden könnte eine wichtige Folgerung gezogen werden: Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie können wir säkulare Instabilitäten erwarten, die auf der Strahlungsrückwirkung beruhen, welche ihrerseits vom Dedekind-Deformationsmodus (der im Inertialsystem quasistationär ist) und nicht vom Jacobi-Modus (der im rotierenden Bezugssystem quasistationär ist) herrühren.

Eine weitere Eigenschaft säkularer, durch Strahlungsrückwirkung hervorgerufener Instabilitäten, nacheinander von Friedman^[19] und Comins^[20] entdeckt, besteht darin, daß die Modi, die zu größeren Werten von m ($=3, 4, \dots$) gehören, bei kleineren Exzentrizitäten instabil werden, obwohl die Anwachszeiten auf das e -Fache für die Instabilität rasch zunehmen. Nach vorläufigen Rechnungen von Friedman^[21] scheinen es jedoch die säkularen Instabilitäten zu sein, die von den zu $m=3$ (oder 4) gehörenden Modi abgeleitet wurden, welche die Rotationsperioden von Pulsaren begrenzen.

Aus obiger Diskussion wird klar, daß die beiden von uns besprochenen Instabilitätstypen relativistischen Ursprungs noch eine wichtige Rolle im hier betrachteten Zusammenhang spielen werden.

10. Die mathematische Theorie Schwarzer Löcher

Bis jetzt habe ich nur die Beschränkungen für die letzten Phasen der Sternentwicklung berücksichtigt, die aus der Existenz einer Obergrenze für die Masse vollständig entarteter Konfigurationen und aus den Instabilitäten relativistischen Ursprungs folgen. Aus diesen und verwandten Betrachtungen geht unausweichlich hervor, daß Schwarze Löcher eines der natürlichen Endprodukte der Entwicklung massereicher Sterne sind, und daß sie außerdem in großer Zahl im Universum vorhanden sein müssen. In diesem letzten Abschnitt möchte ich sehr kurz darauf eingehen, was die allgemeine Relativitätstheorie über sie aussagt. Aber zuerst muß ich genau definieren, was ein Schwarzes Loch ist.

Ein Schwarzes Loch teilt den dreidimensionalen Raum in zwei Gebiete auf: Ein inneres Gebiet, welches durch eine glatte zweidimensionale Oberfläche, den Ereignishorizont, begrenzt ist, und ein äußeres Gebiet, außerhalb des Ereignishorizontes, welches asymptotisch flach ist. Außerdem wird gefordert (als Teil der Definition), daß kein Punkt des inneren Gebietes mit irgendeinem Punkt des äußeren Gebietes kommunizieren kann. Die Unmöglichkeit des Informationsaustauschs wird dadurch garantiert, daß es für Lichtsignale aus dem inneren Gebiet unmöglich ist, den Ereignishorizont zu überschreiten. Die Forderung nach asymptotischer Flachheit des äußeren Gebietes ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß das Schwarze Loch im Raum isoliert ist, und daß die Raum-Zeit sich weit entfernt vom Ereignishorizont der gewöhnlichen Raum-Zeit irdischer Physik nähert.

In der allgemeinen Relativitätstheorie müssen wir Lösungen von Einsteins Vakuum-Gleichungen suchen, die mit den beiden genannten Forderungen in Einklang gebracht werden können. Es ist eine überraschende Erkenntnis, daß die allgemeine Relativitätstheorie für stationäre (d. h. zeitunabhängige) Schwarze Löcher genau eine einzige, eindeutige, zweiparametrische Familie von Lösungen zuläßt, die mit diesen sehr einfachen und notwendigen Forderungen vereinbar sind. Dies ist die Kerr-Familie, in welcher die beiden Parameter die Masse und der Drehimpuls des Schwarzen Lochs sind. Noch bemerkenswerter ist aber, daß die Metrik, die diese Lösungen beschreibt, einfach ist und explizit aufgeschrieben werden kann.

Ich weiß nicht, ob die volle Bedeutung dessen, was ich gesagt habe, klar ist. Lassen Sie es mich erklären.

Schwarze Löcher sind makroskopische Objekte mit Massen, die im Bereich von wenigen bis zu Millionen von Sonnenmassen variieren. In dem Maße, in dem sie als stationär und isoliert betrachtet werden können, kann man sie alle, jedes einzelne von ihnen, *exakt* durch die Kerr-Lösung beschreiben. Dies ist das einzige Beispiel, das wir für eine exakte Beschreibung eines makroskopischen Objekts haben. Die makroskopischen Objekte, wie wir sie um uns herum kennen, werden von einer Vielzahl von Kräften beherrscht, die von einer Vielzahl von Näherungen einer Vielzahl von physikalischen Theorien abgeleitet sind. Im Gegensatz dazu sind die einzigen Elemente bei der Konstruktion Schwarzer Löcher unsere Grundauffassungen von Raum und Zeit. Schwarze Löcher sind daher beinahe per definitionem die vollkommensten makroskopischen Objekte, die es im Universum gibt. Und da die allgemeine

Relativitätstheorie eine einzige eindeutige zweiparametrische Familie von Lösungen angibt, sind sie auch die einfachsten Objekte.

Wenn wir uns nun den physikalischen Eigenschaften der Schwarzen Löcher zuwenden, dann können wir diese am besten durch das Studium ihrer Reaktionen auf äußere Störungen, wie einfallende Wellen unterschiedlicher Art, untersuchen. Solche Studien enthüllen eine analytische Reichhaltigkeit der Kerr-Raumzeit, die man kaum erwartet hätte. Ich möchte hier nicht auf die technischen Einzelheiten^[22] dieser Probleme eingehen. Es genügt festzustellen, daß, entgegen allen früheren Erwartungen, alle Standardgleichungen der mathematischen Physik in der Kerr-Raumzeit exakt gelöst werden können. Diese Lösungen sagen eine Vielzahl physikalischer Phänomene voraus, welche die Schwarzen Löcher bei ihrer Wechselwirkung mit der äußeren Welt zeigen müssen.

Die mathematische Theorie Schwarzer Löcher ist von enormer Komplexität. Jedoch hat ihr Studium mich von der grundsätzlichen Wahrheit alter Spruchweisheit überzeugt:

Das Einfache ist das Zeichen des Wahren

und

Schönheit ist der Abglanz der Wahrheit.

Eingegangen am 27. Februar 1984 [A 505]
Übersetzt von Dr. Hanns-Peter Trautvetter, Münster

- [1] A. S. Eddington: *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge University Press, Cambridge (England) 1926, S. 16.
- [2] S. Chandrasekhar, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 96 (1936) 644.
- [3] A. S. Eddington: *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge University Press, Cambridge (England) 1926, S. 172.
- [4] R. H. Fowler, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 87 (1926) 114.
- [5] S. Chandrasekhar, *Philos. Mag.* 11 (1931) 592.
- [6] S. Chandrasekhar, *Astrophys. J.* 74 (1931) 81.
- [7] S. Chandrasekhar, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 91 (1931) 456.
- [8] S. Chandrasekhar, *Observatory* 57 (1934) 373.
- [9] S. Chandrasekhar, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 95 (1935) 207.
- [10] S. Chandrasekhar, *Z. Astrophys.* 5 (1932) 321.
- [11] S. Chandrasekhar, *Observatory* 57 (1934) 93.
- [12] S. Chandrasekhar, *Astrophys. J.* 140 (1964) 417; siehe auch *Phys. Rev. Lett.* 12 (1964) 114, 437.
- [13] S. Chandrasekhar, *Astrophys. J.* 142 (1965) 1519.
- [14] S. Chandrasekhar, R. F. Tooper, *Astrophys. J.* 139 (1964) 1396.
- [15] S. Detweiler, L. Lindblom, *Astrophys. J. Supp.* 53 (1983) 93.
- [16] S. Chandrasekhar, *Astrophys. J.* 161 (1970) 561; siehe auch *Phys. Rev. Lett.* 24 (1970) 611, 762.
- [17] Zusammenfassung bezüglich der klassischen Ellipsoide siehe S. Chandrasekhar: *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, Yale University Press, New Haven 1968.
- [18] S. Chandrasekhar: *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, Yale University Press, New Haven 1968, Kap. 5, § 37.
- [19] J. L. Friedman, *Commun. Math. Phys.* 62 (1978) 247; siehe auch J. L. Friedman, B. F. Schutz, *Astrophys. J.* 222 (1977) 281.
- [20] N. Comins, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 189 (1979) 233, 255.
- [21] J. L. Friedman, *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983) 11.
- [22] Die Untersuchungen des Autors zur mathematischen Theorie Schwarzer Löcher (1974–1983) sind in seinem neuesten Buch zusammengestellt: *The Mathematical Theory of Black Holes*, Clarendon Press, Oxford 1983.

Als zusätzliche Literatur sei genannt:

S. Chandrasekhar, „Edward Arthur Milne: his part in the development of modern astrophysics“, *Q. J. R. Astr. Soc.* 21 (1980) 93–107; S. Chandrasekhar: *Eddington: The Most Distinguished Astrophysicist of His Time*, Cambridge University Press, Cambridge (England) 1983.